

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap
kategoria DELTA

Zadanie 1

Hobbit potrzebuje 120 dni na wykonanie pracy, ale razem z Krasnoludem wykonali tę pracę w 40 dni. Ile dni potrzebowałby Krasnolud, gdyby sam wykonywał tę pracę?

Zadanie 2

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{4b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{4a-4b}{a}}.$$

Zadanie 3

Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych, w których cyfra „5” występuje dokładnie jeden raz.

Zadanie 4

Oblicz $\sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$ wiedząc, że $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap

kategoria GAMMA

Zadanie 1

Dwa Elfy i jeden Krasnolud wykonują pewną pracę w ciągu 12 dni, zaś jeden Elf i dwa Krasnoludy wykonują tę samą pracę w ciągu 15 dni. Ile czasu potrzebują razem: jeden Elf i jeden Krasnolud na wykonanie tej pracy? Przyjmujemy, jednakowy stopień pracowitości dla Elfów oraz jednakowy stopień pracowitości dla Krasnoludów.

Zadanie 2

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\frac{\frac{2a-b}{b} - \frac{a-2b}{a}}{\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}} \cdot \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}}.$$

Zadanie 3

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, o różnych cyfrach, w których cyfra jedności należy do zbioru $\{0, 4, 8\}$, zaś cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności.

Zadanie 4

Oblicz $\sin^5 \alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^5 \alpha$ wiedząc, że $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap

kategoria BETA

Zadanie 1

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\frac{\frac{3a-b}{b} - \frac{2a-3b}{a}}{\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}}} \cdot \frac{a^6 - b^6}{a^4 - b^4}.$$

Zadanie 2

Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu jak największej liczby czynników całkowitych większych od 1. Poprzez podstawienie $x = 10^n$, z odpowiednio dobranym n , przejdź do trójmianu. Zastosuj postać iloczynową lub wzór skróconego mnożenia. Skorzystaj z cech podzielności.

$$6400160001$$

Zadanie 3

Oblicz, ile jest liczb naturalnych n spełniających wszystkie podane warunki:

- (a) $1000 \leq n \leq 7000$,
- (b) n jest liczbą nieparzystą,
- (c) w zapisie liczby n występuje co najmniej jedna cyfra „5”.

Zadanie 4

Oblicz $\sin^5 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha + \cos^5 \alpha$ wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap

kategoria ALFA

Zadanie 1

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\frac{\frac{3a}{4b} - 2 + \frac{4b}{3a}}{\frac{b}{12a-12b} - \frac{a-b}{a}} : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

Zadanie 2

Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu jak największej liczby czynników całkowitych większych od 1. Poprzez podstawienie $x = 10^n$, z odpowiednio dobranym n , przejdź do wielomianu. Zastosuj rozkład na czynniki. Skorzystaj z cech podzielności.

15000580004100006

Zadanie 3

Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ wybieramy dwie różne liczby ($n \geq 1$). Prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma ich kwadratów będzie liczbą podzielną przez 4 jest równe $\frac{4}{17}$. Oblicz n .

Zadanie 4

Oblicz $\sin^4 \alpha \sin 2\alpha + \sin^4 \alpha \cos 2\alpha + \cos^4 \alpha \sin 2\alpha + \cos^4 \alpha \cos 2\alpha$ wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$.