Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

III Etap

kategoria DELTA

Zadanie 1.

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

$$\frac{b^2 - \dfrac{b}{a} + \dfrac{1-ab}{a^2}}{b^2 - \dfrac{b}{a} - \dfrac{1-ab}{a^2}}$$

Zadanie 2.

(a) Rozwiąż równanie $4x^6 - 9x^4 + 8x^2 - 18 = 0$.

(b) Rozwiąż nierówność $4 - 3|x+2| \leq 2$.

Zadanie 3.

W trójkącie ABC dane są dwa boki $|BC| = 2$, $|AC| = 3$. Suma miar kątów przy wierzchołku A oraz przy wierzchołku C jest równa 60°. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC.

Zadanie 4.

Udowodnij, że jeżeli reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 3 jest równa 2, to reszta z dzielenia przez 3 kwadratu liczby

$$n - 4$$

jest równa 1.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2023/2024
Politechnika Świętokrzyska
Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia
III Etap
kategoria GAMMA

Zadanie 1.(dopisek w poleceniu)
Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole (ewentualnie podniesione do kwadratu) powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

$$\frac{\dfrac{a^2+3b^2}{ab^2}-\dfrac{3a^2+b^2}{a^2b}}{\left(\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)}:\frac{a-b}{a+b}$$

Zadanie 2.

(a) Rozwiąż równanie $-x^3-3x^2+2=(-x^2-2x+2)(x^6+1)$.

(b) Rozwiąż nierówność $\left|\frac{2}{x-3}\right|\geq 1$.

Zadanie 3.
W trójkącie ABC dane są dwa boki $|BC|=6$, $|AC|=9$. Tangens kąta przy wierzchołku B jest równy $-2\sqrt{2}$. Oblicz pole tego trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 4.
Udowodnij, że jeżeli reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 3 jest równa 2, to reszta z dzielenia przez 3 sześcianu liczby n pomniejszonego o 10 jest równa 1.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

III Etap

kategoria BETA

Zadanie 1.

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

$$\frac{\frac{a-3b}{b^2}-\frac{2b-3a}{a^2}}{\frac{a+3b}{b^2}+\frac{3a+2b}{a^2}}\cdot\frac{\frac{1}{b^3}-\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{a^3}}:\frac{a-b}{a+b}$$

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian

$$W(x)=(x-2)\big((m+1)x^2-3mx+m+1\big)$$

ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste tego samego znaku.

Zadanie 3.

Wyznacz równanie figury (w najprostszej postaci) utworzonej przez wszystkie punkty $P(x,y)$ w układzie współrzędnych na płaszczyźnie, których odległość od punktu $F(0,\frac{1}{4})$ jest taka sama, jak odległość od prostej $4y+1=0$. Podaj nazwę figury oraz sporządź jej rysunek.

Zadanie 4.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest nierówność

$$(x^2+1)(y^2+1)\geq 4xy\ .$$

Wyznacz wszystkie pary (x,y), dla których zachodzi równość.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2023/2024

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

III Etap

kategoria ALFA

Zadanie 1.

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole (ewentualnie podniesione do kwadratu) powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

$$\frac{\dfrac{a-b}{ab^2}-\dfrac{2a-3b}{a^2b}}{\dfrac{a^2-2b^2}{b^2}-\dfrac{a^2-9b^2}{a^2}}$$

Zadanie 2.

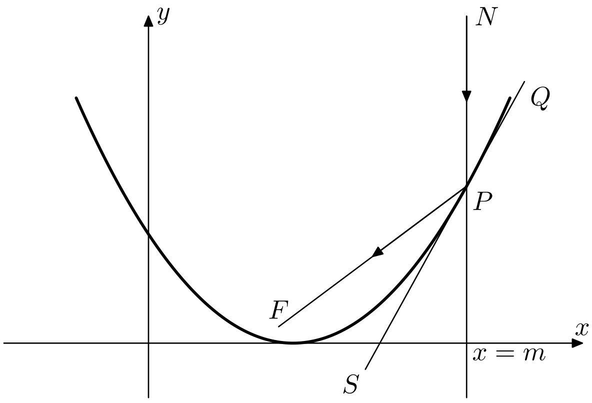
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian

$$x^3-(m+1)x^2+(m-3)x+3=0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest średnią arytmetyczną pozostałych.

Zadanie 3.

Dana jest parabola $y = x^2 - 2x + 1$ oraz prosta $x = m$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wzdłuż prostej biegnie od punktu N promień światła (patrz: rysunek), który odbija się od paraboli w punkcie P zgodnie z zasadą: kąt padania równy jest kątowi odbicia. Udowodnij, że istnieje na płaszczyźnie punkt F wspólny dla wszystkich promieni odbitych od paraboli niezależnie od wartości parametru m. Wyznacz współrzędne punktu F.
UWAGA: Zasada odbicia oznacza w tym przypadku, że jeżeli odcinek SQ jest zawarty w stycznej do paraboli w punkcie P, to kąty SPF oraz NPQ są równe.



Zadanie 4.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest nierówność

$$(3x^2+1)(3y^2+1)+2 \geq 6xy(1+x+y)\ .$$

Wyznacz wszystkie pary (x, y), dla których zachodzi równość.