

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2022/2023

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap
kategoria DELTA

Zadanie 1

Na początku roku ojciec przekazał synowi i córce jednakową kwotę majątku. Poprzez roczną inwestycję syn zwiększył otrzymany majątek o $\frac{1}{10}$, a córka o $\frac{1}{12}$. Gdy na koniec roku oboje dostali jeszcze od ojca 2 tys. zł, okazało się, że majątek syna stanowi $1\frac{1}{66}$ majątku córki. Wyznacz kwotę, którą każde z rodzeństwa otrzymało od ojca na początku roku.

Zadanie 2

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\frac{a - \frac{b^2 - ab}{a} - b}{a - \frac{ab - b^2}{a} - b}.$$

Zadanie 3

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc że wyróżnik tego trójmianu jest równy 36, zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, 4\frac{1}{2})$, a rzędna punktu przecięcia wykresu funkcji z osią Oy jest równa -8 .

Zadanie 4

Dane są punkty $A(-1, -8)$ oraz $B(2, 1)$.

- Oblicz odległość punktu $P(-1, 2)$ od prostej przechodzącej przez punkty A i B .
- Napisz równanie okręgu o środku w punkcie P stycznego do prostej AB .
- Oblicz pole wycinka wyznaczonego koła wiedząc, że kąt środkowy tego wycinka jest równy 60° .

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2022/2023

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap

kategoria GAMMA

Zadanie 1

Na początku roku ojciec przekazał synowi i córce jednakową kwotę majątku. Tak samo uczyniła matka, przy czym kwota przekazana przez matkę była o 33 tys. mniejsza. Poprzez roczną inwestycję syn zwiększył majątek otrzymany od ojca o $\frac{1}{11}$, zaś majątek otrzymany od matki zwiększył o $\frac{1}{15}$. Córka przeciwnie: majątek otrzymany od ojca zwiększyła o $\frac{1}{15}$, zaś majątek otrzymany od matki zwiększyła o $\frac{1}{11}$. Pod koniec roku, okazało się, że majątek syna stanowi $1\frac{1}{400}$ majątku córki. Wyznacz kwotę, którą każde z rodzeństwa otrzymało od ojca, i kwotę, którą każde z rodzeństwa otrzymało od matki, na początku roku.

Zadanie 2

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\left(3 \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) : \left(a - \frac{b^3}{a^2}\right).$$

Zadanie 3

Dany jest okrąg o środku O i równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 5$ oraz prosta o równaniu $x - 3y + 3 = 0$, która przecina ten okrąg w punktach A i B , przy czym punkt A ma mniejszą współrzędną x . W trójkącie ABO poprowadzono dwusieczną kąta OBA , która przecina bok OA w punkcie M . Oblicz długość odcinka OM . Usuń niewymierność z mianownika.

Zadanie 4

Wyznacz wszystkie wartości rzeczywistego parametru m , dla których dwa różne rzeczywiste rozwiązania x_1, x_2 równania

$$-3x^2 + (-2m + 1)x - 3 = 0$$

spełniają warunek

$$5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2 \leq 2x_1 + 2x_2 + 10.$$

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2022/2023

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap

kategoria BETA

Zadanie 1

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\frac{\left(\frac{a+b}{a} - \frac{b}{a+b}\right) \left(\frac{a-b}{b} + \frac{a}{a-b}\right)}{(a^6 - b^6) : (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}.$$

Zadanie 2

Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu jak największej liczby czynników całkowitych większych od 1. Poprzez podstawienie $x = 10^n$, z odpowiednio dobranym n , przejdź do trójmianu. Zastosuj postać iloczynową i wzór skróconego mnożenia. Skorzystaj z cech podzielności.

$$1000003000002$$

Zadanie 3

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 4x$, zaś funkcja g jest określona wzorem $g(x) = |f(x)| - 3$. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$g(x) = 2m$$

w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 4

Wyznacz równanie figury utworzonej przez wszystkie punkty $P(x, y)$ w układzie współrzędnych na płaszczyźnie, których odległość od punktu $A(0, 0)$ jest 2 razy większa od odległości od punktu $B(3, 0)$. Podaj nazwę figury oraz sporządź jej rysunek.

Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny
2022/2023

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

II Etap

kategoria ALFA

Zadanie 1

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg i dzielenia).

$$\left(25 \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right) : \left(\frac{52a-48b}{a-\frac{b^2}{a}} - 36\right).$$

Zadanie 2

Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu jak największej liczby czynników całkowitych większych od 1. Poprzez podstawienie $x = 10^n$, z odpowiednio dobranym n , przejdź do wielomianu. Zastosuj rozkład na czynniki i wzory skróconego mnożenia. Skorzystaj z cech podzielności.

$$4000008000005000001$$

Zadanie 3

Dana jest funkcja kwadratowa opisana wzorem

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 2.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla którego równanie

$$|f(x)| = |3m - 2|$$

ma dokładnie cztery rozwiązania, z których dwa są ujemne i dwa są dodatnie.

Zadanie 4

W trójkącie równobocznym ABC dane są współrzędne punktów: $B(1, 6)$ oraz $P(4, -3)$, gdzie punkt P jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z punktu B .

- Napisz równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
- Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki BC i BA tego trójkąta.