Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2022/2023
Politechnika Świętokrzyska
Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia
III Etap
kategoria DELTA

Zadanie 1.(6 punktów)
Wykonaj podane obliczenia. Każdą z liczb a, b, c zapisz w postaci: całości lub ułamka zwykłego nieskracalnego postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\sqrt{12} - 2\sqrt{27}}{\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}} \\
b &= \frac{4^5 \cdot 25^2}{20^4} : \frac{\frac{1}{9}\left(3^{10} \cdot 9^{-4}\right)^2}{81^{-\frac{1}{4}}} \\
c &= 3^{\log_3 8} + \log_5 \frac{1}{9} - 2\log_5 \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

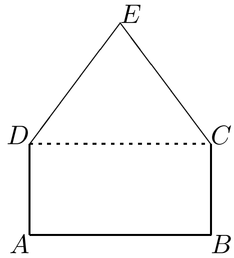
Zadanie 2.(4 punkty)
Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

$$
\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{2a-b}{a}} : \frac{a+b}{a-b}
$$

Zadanie 3.(5 punktów)
Liczby x, 4, $4x$ w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wyrazy a_5 i a_{10} tego ciągu są równe odpowiednio osiemnastemu i osiemdziesiątemu wyrazowi ciągu arytmetycznego (b_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Oblicz sumę

$$
b_{20} + b_{21} + b_{22} + \ldots + b_{80} \ .
$$

Zadanie 4.(5 punktów)
Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz trójkąt równoramienny DCE (zobacz rysunek). Długość ramienia CE tego trójkąta jest równa $\frac{5}{6}$ długości boku AB tego prostokąta. Obwód pięciokąta $ABCED$ jest równy 6. Wyznacz długość boku AB, tak aby pole pieciokąta $ABCED$ było największe.



Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2022/2023

Politechnika Świętokrzyska

Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia

III Etap

kategoria GAMMA

Zadanie 1.(6 punktów)

Wykonaj podane obliczenia. Każdą z liczb a, b, c zapisz w postaci: całości lub ułamka zwykłego nieskracalnego postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.

$$a = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} - \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}\right)^{-1}\right)^{-1}$$

$$b = \frac{6^{16} - \left(\sqrt[3]{6}\right)^{45} - 4 \cdot 36^7}{\left(18^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}\right)^{28}}$$

$$c = 25^{\log_5 3} + \frac{\log_7 5\sqrt{5}}{\log_7 \frac{1}{5}}$$

Zadanie 2.(4 punkty)

Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole (ewentualnie podniesione do kwadratu) powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

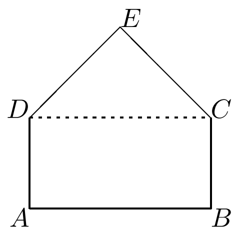
$$\frac{\frac{a-5b}{ab^2} - \frac{a-9b}{a^2b}}{\frac{a^2+3b^2}{ab^2} - \frac{3a^2+9b^2}{a^2b}}$$

Zadanie 3.(5 punktów)

Trzy początkowe wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są równe odpowiednio: $3x^2 - 7x$, $x^3 - 3x - 1$, $3x - 2$. Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest malejącym ciągiem geometrycznym. Piętnasty wyraz ciągu (a_n) jest równy pierwszemu wyrazowi ciągu (b_n), a piąty wyraz ciągu (a_n) jest równy b_3. Oblicz sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n).

Zadanie 4.(5 punktów)

Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz trójkąt równoramienny prostokątny DCE (zobacz rysunek). Obwód pięciokąta $ABCED$ jest równy dodatniej liczbie ℓ. Wyznacz długość boku AB, tak aby pole pieciokąta $ABCED$ było największe.



Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2022/2023
Politechnika Świętokrzyska
Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia
III Etap
kategoria BETA

Zadanie 1.(6 punktów)
Wykonaj podane obliczenia. Każdą z liczb a, b, c zapisz w postaci: całości lub ułamka zwykłego nieskracalnego postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.

$$\begin{aligned} a &= \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 \\ b &= \frac{10^{-14}+12\cdot 10^{-15}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{15}\left(\frac{1}{25}\right)^{15}}-\left(2^{-\frac{3}{4}}+2^{-\frac{3}{4}}+2^{-\frac{3}{4}}+2^{-\frac{3}{4}}\right)^4 \\ c &= 4^{\log_2\sqrt{7}-3}+\log_{\sqrt{2}}(\log_5 4)+\log_{\sqrt{2}}(\log_2 5) \end{aligned}$$

Zadanie 2.(4 punkty)
Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole (ewentualnie podniesione do kwadratu) powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

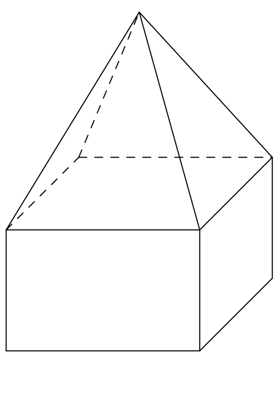
$$\frac{\dfrac{a-4b}{ab^2}-\dfrac{a-6b}{a^2b}}{\dfrac{3a^2+b^2}{ab^2}-\dfrac{6a^2+2b^2}{a^2b}}$$

Zadanie 3.(5 punktów)
Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest równy 15, a iloraz tego ciągu jest różny od zera. Każdy wyraz tego ciągu jest cztery razy większy o sumy wszystkich wyrazów następujących po nim. Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest ciągiem arytmetycznym. Trzeci wyraz ciągu (a_n) oraz odwrotność pierwszego wyrazu tego ciągu są równe odpowiednio pierwszemu i trzeciemu wyrazowi ciągu (b_n). Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n) o numerach, które są liczbami parzystymi.

Zadanie 4. (5 punktów; wersja poprawiona: zmieniono pole)
Rozpatrujemy bryły utworzone z granastosłupa prawidłowego czworokątnego oraz ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, spełniające wszystkie poniższe warunki:

- graniastosłup i ostrosłup mają takie same podstawy (zobacz rysunek),
- stosunek wysokości ściany bocznej ostrosłupa do krawędzi jego podstawy wynosi 5:8,
- pole powierzni całkowitej utworzonej bryły jest równe 336.

Wyznacz długości krawędzi tej bryły, spośród rozważanych, która ma największą objętość. Wyznacz tę największą objętość.



Ogólnopolski Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny 2022/2023
Politechnika Świętokrzyska
Fundacja im. Jerzego Zaremby, Fundacja Św. Marcina Patria et Misericordia
III Etap
kategoria ALFA

Zadanie 1.(6 punktów)
Wykonaj podane obliczenia. Każdą z liczb a, b, c zapisz w postaci: całości lub ułamka zwykłego nieskracalnego postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\left[\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^{-1} - \left(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\left(\sqrt[3]{432}\right)^{-1}} \\
b &= \frac{6^{-14} + 12 \cdot 6^{-15}}{(0{,}5)^{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}} - \left(2^{-\frac{5}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} + 4^{-\frac{5}{6}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{9}}\right)^{3} \\
c &= \frac{\log_3^2 6 - \log_3^2 2}{3 + \frac{\log_5 64}{\log_5 3} - \log_{\frac{1}{8}} 3^{2\log_3 2 - \log_{81} 16}}
\end{aligned}$$

Zadanie 2. (3 punkty)
Zakładając wykonalność wszystkich potrzebnych działań, uprość podane wyrażenie poprzez przekształcenie do ułamka (maksymalnie skróconego) z jedną kreską ułamkową. Wyrażenia końcowe w liczniku i w mianowniku powinny mieć postać zredukowaną, zawierającą tylko symbole (ewentualnie podniesione do kwadratu) powiązane mnożeniem, dodawaniem lub odejmowaniem (nie powinny zawierać nawiasów, potęg o ujemnych wykładnikach i dzielenia).

$$\frac{\frac{2a-b}{2ab^2} - \frac{a-2b}{2a^2b}}{\frac{a^2}{b^2} + 1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Zadanie 3. (5 punktów)
Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, wyraża się wzorem

$$S_n = n^2 - 11n\ .$$

Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest ciągiem geometrycznym. Dwudziesty wyraz ciągu (a_n) jest równy b_1. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) o numerach niepodzielnych przez 3 jest równa 48. Wyznacz wzór ogólny ciągu (b_n).

Zadanie 4. (6 punktów)
Dany jest prostopadłościan, którego podstawa ma boki o długościach 15 i 20, a wysokość jest równa 8. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do tej podstawy pod kątem, którego tangens należy do przedziału domkniętego $[\frac{2}{3}, 2]$. Wyznacz wymiary tego z rozważanych przekrojów, który ma największe pole. Wyznacz to pole.